18/01/17

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\text{πεπερασμένα} & & \text{άπειρα} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\simeq T(k) & \text{αριθμ.} & & \text{υπεραριθμ.} \\
 & \simeq \mathbb{N} & & \text{όχι } \simeq \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

Ορισμός: Το A καλείται το πολύ αριθμήσιμο αν A πεπερασμένο ή $A \simeq \mathbb{N}$.

Ορισμός: $A \precsim B$, $\exists\, C \subseteq B$ με $A \simeq C$

$$\exists\, f : A \xrightarrow{1-1} B$$

$$\exists\, g : A \xrightarrow{\text{επί}} B$$

Πρόταση: A: το πολύ αριθμήσιμο $\Leftrightarrow A \precsim \mathbb{N}$.

Απόδειξη: (Στο βιβλίο)

Πρόταση: A: το πολύ αριθμήσιμο $\Leftrightarrow \exists\, f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} A$

Πρόταση: Η ένωση μιας (το πολύ) αριθμήσιμης οικογένειας (το πολύ) αριθμήσιμων συνόλων είναι (το πολύ) αριθμήσιμη.

Απόδειξη: (Στο βιβλίο)

Πρόταση: A_1, A_2 το πολύ αριθμήσιμα $\Rightarrow A_1 \times A_2$ το πολύ αριθμήσιμα.

$$A_1 : \exists f_1 : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} A_1 \quad\Big\|\quad \phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A_1 \times A_2$$
$$\exists f_2 : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} A_2 \quad\Big\|\quad (x, y) \to (f(x_1), (f(x_2))$$

Πρόταση: $\mathbb{R}$ όχι αριθμήσιμο (+ απόδειξη)

Θεώρημα (S-B): $A \preceq B \wedge B \preceq A \Rightarrow A \simeq B$

Θεώρημα Cantor: $X < P(X)$

Απόδειξη: Για $\emptyset \neq X$ κ $X \simeq P(X)$ [πρόταση $X \subseteq P(X) \Rightarrow X \preceq P(X)$]

Τότε $\exists f : X \underset{\text{επί}}{\xrightarrow{1-1}} P(X)$

Θεωρώ $A = \{x \in X : x \notin \underbrace{f(x)}_{\subseteq X}\} \subseteq X$

ας είναι $a \in X : f(a) = A$

Αν το $a \in A$, τότε από τον ορισμό $a \notin f(a) = A$ } άτοπο!

Αν το $a \notin A$, τότε $a \in A = f(a)$

(εκτός ύλης εξεταστικής Ιανουαρίου)